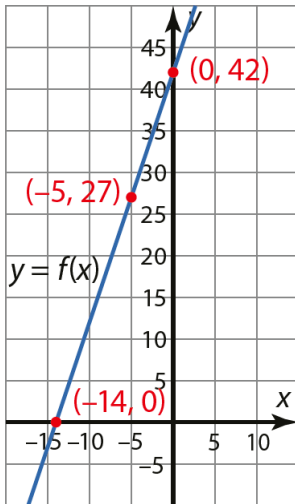


4.1

Piirretään geometriaohjelmalla funktion $f(x) = 3x + 42$ kuvaaja.



- a) Kohdassa $x = -5$ funktion kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 27.
Funktion f arvo kohdassa -5 on 27.
 $f(-5) = 27$
- b) Kohdassa $x = 0$ funktion kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 42.
Funktion f arvo kohdassa nolla on 42.
 $f(0) = 42$
- c) Funktion nollakohta tarkoittaa sitä muuttujan x arvoa, jolla funktion arvo on nolla. Funktion f arvo on nolla kuvaajan pisteessä $(-14, 0)$.
Funktion f nollakohta on $x = -14$.

Vastaus

- a) $f(-5) = 27$
- b) $f(0) = 42$
- c) $x = -14$

4.2

a) Funktion voi tunnistaa laskemalla sen arvon kohdassa $x = 1$.

$$f(x) = 3x + 10$$

Kuvaajalla 3 on piste $(1, 13)$.

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 10 = 13$$

$$g(x) = 3x + 15$$

Kuvaajalla 2 on piste $(1, 18)$.

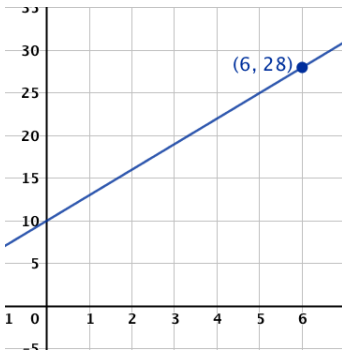
$$g(1) = 3 \cdot 1 + 15 = 18$$

$$h(x) = 4x + 10$$

Kuvaajalla 1 on piste $(1, 14)$.

$$h(1) = 4 \cdot 1 + 10 = 14$$

b) Määritetään kuvaajasta muuttujan x arvo, jolla $f(x) = 28$.



$$f(x) = 28, \text{ kun } x = 6.$$

Tarkistetaan laskemalla funktion arvo.

$$f(x) = 3x + 10$$

$$f(6) = 3 \cdot 6 + 10 = 28$$

c) Määritetään kuvaajasta muuttujan x arvo, jolla $g(x) = h(x)$.



$g(x) = h(x)$, kun $x = 5$.

Tarkistetaan laskemalla funktioiden arvot.

$$g(x) = 3x + 15$$

$$g(5) = 3 \cdot 5 + 15 = 30$$

$$h(x) = 4x + 10$$

$$h(5) = 4 \cdot 5 + 10 = 30$$

Vastaus

a) $f=3$, $g=2$, $h=1$

b) $x = 6$

c) $x = 5$

4.3

a) Lasketaan funktion $f(x) = 12 - 9x$ arvot $f(2)$ ja $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 12 - 9 \cdot 2 && \text{Sijoitetaan muuttujan } x \text{ paikalle luku } 2. \\ &= 12 - 18 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 12 - 9 \cdot 0 && \text{Sijoitetaan muuttujan } x \text{ paikalle luku } 0. \\ &= 12 - 0 \\ &= 12 \end{aligned}$$

b) Lasketaan funktion $f(x) = 12 - 9x$ arvo kohdassa -1 .

$$\begin{aligned} f(-1) &= 12 - 9 \cdot (-1) && \text{Sijoitetaan muuttujan } x \text{ paikalle luku } -1. \\ &= 12 + 9 \\ &= 21 \end{aligned}$$

c) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on nolla.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{Merkitään funktion lauseke yhtä suureksi} \\ 12 - 9x &= 0 && \text{kuin nolla ja ratkaistaan muuttuja } x. \\ -9x &= -12 && \begin{array}{l} | -12 \\ \div (-9) \end{array} \\ x &= \frac{-12}{-9} && \text{(3)} \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $f(2) = -6$, $f(0) = 12$

b) $f(-1) = 21$

c) $x = \frac{4}{3}$

4.4

a) Lasketaan funktion $f(x) = 5x - 7$ arvot.

$$f(8) = 5 \cdot 8 - 7 = 40 - 7 = 33$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 7 = -\frac{15}{2} - \frac{14}{2} = -\frac{29}{2} = -14\frac{1}{2}$$

b) Lasketaan funktion $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ arvot.

$$g(8) = \frac{1}{2} \cdot 8 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = -\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$$

Vastaus

a) $f(8) = 33$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{29}{2} = -14\frac{1}{2}$

b) $g(8) = 5$, $g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$

4.5

- a) Yhden kilometrin nousu alentaa lämpötilaa $6,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Korkeus (km)	Lämpötila ($^{\circ}\text{C}$)
0	14
1	$14 - 6,0 = 8$
2	$14 - 2 \cdot 6,0 = 2$
3	$14 - 3 \cdot 6,0 = -4$
x	$14 - x \cdot 6,0 = 14 - 6x$

- b) Lämpötilan celsiusasteina x kilometrin korkeudella ilmaisee funktio

$$f(x) = 14 - 6x.$$

- c) Lasketaan funktion arvo $f(0)$.

$$f(0) = 14 - 6 \cdot 0 = 14.$$

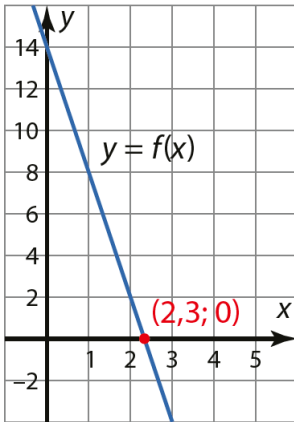
Lämpötila vuoren juurella merenpinnan korkeudella on $14\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Lasketaan funktion arvo $f(3,5)$.

$$f(3,5) = 14 - 6 \cdot 3,5 = -7.$$

Lämpötila vuoren huipulla $3,5\text{ km:n}$ korkeudella on $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$.

d) Piirretään funktion $f(x) = 14 - 6x$ kuvaaja.



Kuvaajasta nähdään, että kun korkeus on 2,3 km, niin lämpötila on 0°C .

Lämpötilan nollaraja on 2,3 km:n korkeudella.

Vastaus

b) $f(x) = 14 - 6x$

c) $f(0) = 14$ ($^{\circ}\text{C}$) on lämpötila vuoren juurella,
 $f(3,5) = -7$ ($^{\circ}\text{C}$) on lämpötila vuoren huipulla

d) 2,3 km:n korkeudella

4.6

a) Rannekkeen ostaneen kustannukset:

Sisäänpääsy ja kaikki laitteet 54 €.

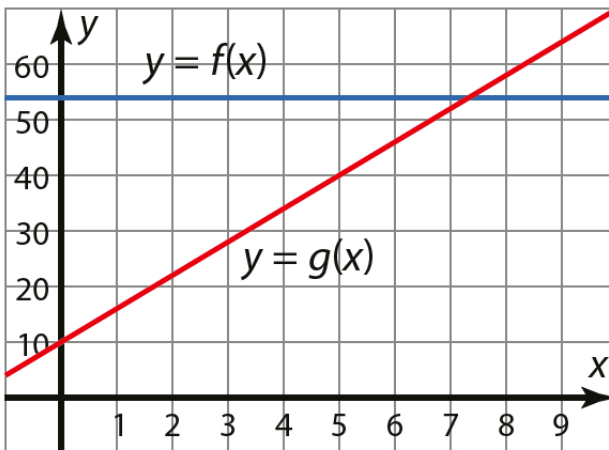
Kustannusten riippuvuuden ajokertojen lukumäärästä x ilmaisee funktio $f(x) = 54$.

Ilman ranneketta huvittelevan kustannukset:

10 € sisäänpääsymaksu ja 6 € jokaisesta ajokerrasta.

Kustannusten riippuvuuden ajokertojen lukumäärästä x ilmaisee funktio $g(x) = 10 + 6x$.

b) Piirretään funktioiden $f(x) = 54$ ja $g(x) = 10 + 6x$ kuvaajat.



- c) Funktion g kuvaaja on funktion f kuvaajan alapuolella, kun x on pienempi kuin $7,3$.

Siis vaihtoehto g on halvempi, kun ajokertoja on korkeintaan 7 .

Vastaus

a) $f(x) = 54$ ja $g(x) = 10 + 6x$

- c) Kun ajokertoja on korkeintaan 7 .

4.7

a) Funktion f sääntö: Luku x kerrotaan luvulla -3 ja tuloon lisätään 8 .

$$f(x) = -3 \cdot x + 8 = -3x + 8$$

b) $f(-2) = -3 \cdot (-2) + 8 = 6 + 8 = 14$

$$f(5) = -3 \cdot 5 + 8 = -15 + 8 = -7$$

Vastaus

a) $f(x) = -3x + 8$

b) $f(-2) = 14$ ja $f(5) = -7$

4.8

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$f(x) = g(x)$$

$$3x - 12 = -x + 44 \quad | +x + 12$$

$$3x + x = 44 + 12$$

$$4x = 56 \quad | :4$$

$$x = 14$$

Lasketaan funktioiden arvot kohdassa 14.

$$f(x) = 3x - 12$$

$$f(14) = 3 \cdot 14 - 12 = 30$$

$$g(x) = -x + 44$$

$$g(14) = -14 + 44 = 30$$

Vastaus

$$x = 14, \quad f(14) = 30 \quad \text{ja} \quad g(14) = 30$$

4.9

$$f(x) = ax + b$$

$$f(0) = 7$$

$$a \cdot 0 + b = 7$$

$$b = 7$$

$$f(12) = 4$$

$$a \cdot 12 + b = 4$$

$$12a + b = 4$$

Tehtävänä on ratkaista yhtälöpari

$$\begin{cases} b = 7 \\ 12a + b = 4. \end{cases}$$

Tapa 1. Ratkaistaan CAS-laskimella.

Saadaan $a = -\frac{1}{4}$ ja $b = 7$.

Tapa 2. Ratkaistaan ilman laskinta.

Sijoitetaan $b = 7$ yhtälöön $12a + b = 4$ ja ratkaistaan a .

$$12a + 7 = 4 \quad | -7$$

$$12a = -3 \quad | :12$$

$$a = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Vastaus

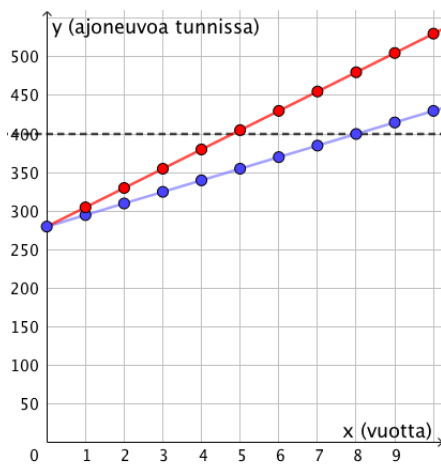
$$a = -\frac{1}{4} \text{ ja } b = 7$$

4.10

Tapa 1. Lasketaan arvoja ja piirretään suorat

x (vuotta)	y (ajoneuvoa tunnissa)	
	minimi	maksimi
0	280	280
1	295	305
2	310	330
3	325	355
4	340	380
5	355	405
6	370	430
7	385	455
8	400	480
9	415	505
10	430	530

Sijoitetaan arvoja vastaavat pisteet geometriaohjelman koordinaatistoon ja piirretään niiden kautta kulkevat suorat.



Tapa 2. Muodostetaan funktiot

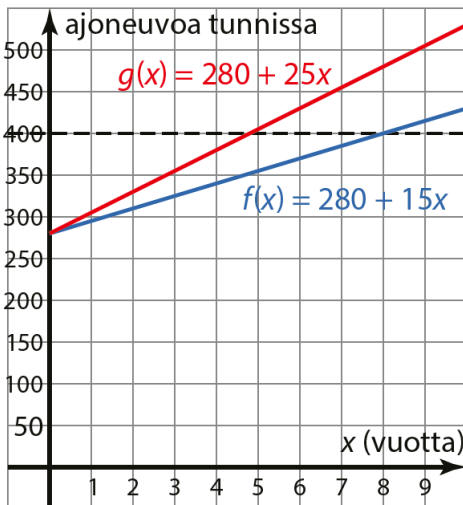
Minimi:

Ajoneuvojen lukumäärä on alussa 280 ja kasvaa 15:llä joka vuosi.
Lukumäärän x vuoden kuluttua ilmaisee funktio $f(x) = 280 + 15x$.

Maksimi:

Ajoneuvojen lukumäärä on alussa 280 ja kasvaa 55:llä joka vuosi.
Lukumäärän x vuoden kuluttua ilmaisee funktio $g(x) = 280 + 25x$.

Piirretään funktioiden kuvaajat geometriaohjelmalla.



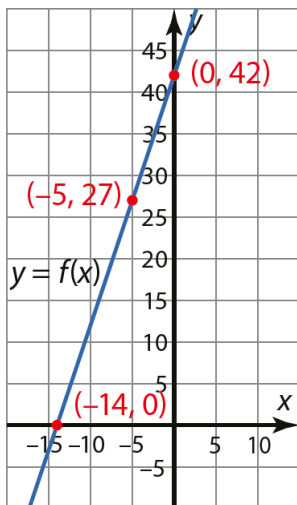
Kuvaajasta nähdään, että 400 ajoneuvon raja saavutetaan minimikasvulla 8 vuoden kuluttua ja maksimikasvulla 5 vuoden kuluttua.

Vastaus

minimikasvulla 8 vuoden kuluttua, maksimikasvulla 5 vuoden kuluttua

4.11

Piirretään geometriaohjelmalla funktion $f(x) = 3x + 42$ kuvaaja.



- a) Kohdassa $x = -5$ funktion kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 27.
Funktion f arvo kohdassa -5 on 27.
 $f(-5) = 27$
- b) Kohdassa $x = 0$ funktion kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 42.
Funktion f arvo kohdassa nolla on 42.
 $f(0) = 42$
- c) Funktion nollakohta tarkoittaa sitä muuttujan x arvoa, jolla funktion arvo on nolla. Funktion f arvo on nolla kuvaajan pisteessä $(-14, 0)$.
Funktion f nollakohta on $x = -14$.

Vastaus

- a) $f(-5) = 27$
- b) $f(0) = 42$
- c) $x = -14$

4.12

a) Funktion voi tunnistaa laskemalla sen arvon kohdassa $x = 1$.

$$f(x) = 4x + 20$$

Kuvaajalla 3 on piste $(1, 24)$.

$$f(1) = 4 \cdot 1 + 20 = 24$$

$$g(x) = -5x + 20$$

Kuvaajalla 1 on piste $(1, 15)$.

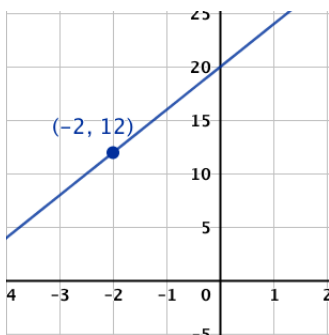
$$g(1) = -5 \cdot 1 + 20 = 15$$

$$h(x) = 20x - 30$$

Kuvaajalla 2 on piste $(1, -10)$.

$$h(1) = 20 \cdot 1 - 30 = -10$$

b) Määritetään kuvaajasta muuttujan x arvo, jolla $f(x) = 12$.



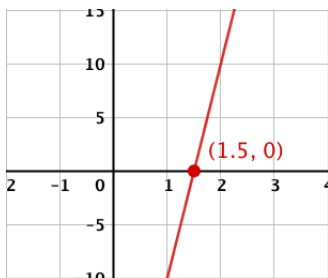
$$f(x) = 12, \text{ kun } x = -2.$$

Tarkistetaan laskemalla funktion arvo.

$$f(x) = 4x + 20$$

$$f(-2) = 4 \cdot (-2) + 20 = 12$$

c) Määritetään kuvaajasta muuttujan x arvo, jolla $h(x) = 0$.



$$h(x) = 0, \text{ kun } x = 1,5.$$

Tarkistetaan laskemalla funktioiden arvot.

$$h(x) = 20x - 30$$

$$h(1,5) = 20 \cdot 1,5 - 30 = 0$$

Vastaus

a) $f-3$, $g-1$, $h-2$

b) $x = -2$

c) $x = 1,5$

4.13

- a) Lasketaan funktion $f(x) = -5x + 11$ arvot $f(0)$ ja $f(3)$.

$$\begin{aligned}f(0) &= -5 \cdot 0 + 11 \\&= 0 + 11 \\&= 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(3) &= -5 \cdot 3 + 11 \\&= -15 + 11 \\&= -4\end{aligned}$$

- b) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on nolla.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\-5x + 11 &= 0 && | -11 \\-5x &= -11 && | :(-5) \\x &= \frac{11}{5}\end{aligned}$$

- c) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on 26.

$$\begin{aligned}f(x) &= 26 \\-5x + 11 &= 26 && | -11 \\-5x &= 15 && | :(-5) \\x &= -3\end{aligned}$$

Vastaus

a) $f(0)=11$, $f(3)=-4$

b) $x=\frac{11}{5}$

c) $x=-3$

4.14

- a) Funktion g sääntö: Luku x jaetaan kahdella ja osamäärästä vähennetään 3.

$$g(x) = \frac{x}{2} - 3$$

b) $g(-2) = \frac{-2}{2} - 3 = -1 - 3 = -4$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{\frac{4}{3}}{2} - 3 \\ &= \frac{4}{3} : 2 - 3 \\ &= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} - 3 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $g(x) = \frac{x}{2} - 3$

b) $g(-2) = -4$ ja $g\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$

4.15

- a) Yhden metrin laskeutuminen suurentaa painetta 10 kPa.

Syvyys (m)	Paine (kPa)
0	100
1	$100 + 10 = 110$
2	$100 + 2 \cdot 10 = 120$
3	$100 + 3 \cdot 10 = 130$
x	$100 + x \cdot 10 = 100 + 10x$

Paineen x metrin syvyydessä ilmaisee funktio

$$p(x) = 100 + 10x$$

- b) Lasketaan paine 459 m syvyydessä.

$$p(459) = 100 + 10 \cdot 459 = 4690 \approx 4700$$

Paine 459 m syvyydessä on 4700 kPa.

Lasketaan paine 10 994 m syvyydessä.

$$p(10\,994) = 100 + 10 \cdot 10\,994 = 110\,040 \approx 110\,000$$

Paine 10 994 m syvyydessä on 110 000 kPa.

c) Ratkaistaan x , kun paine on 500 kPa.

$$p(x) = 500$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$100 + 10x = 500$$

$$x = 40$$

Sukellusvene on 40 metrin syvyydessä.

Vastaus

a) $p(x) = 100 + 10x$

b) 4700 kPa, 110 000 kPa

c) 40 m:n syvyydessä

4.16

a) Kokonaishinta yksitellen:

Yhden elokuvan hinta 12 €.

Kuuden elokuvan hinta $6 \cdot 12 \text{ €} = 72 \text{ €}$.

Kokonaishinta festarikortilla:

Festarikortti 40 € ja jokainen elokuva 7 €.

Kuuden elokuvan hinta $40 \text{ €} + 6 \cdot 7 \text{ €} = 82 \text{ €}$.

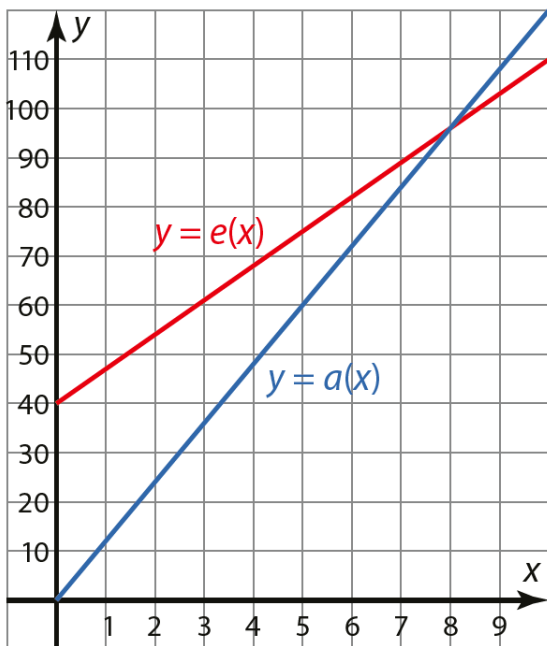
Aino maksoi 72 € ja Eino 82 €.

b) Muodostetaan funktiot.

$$a(x) = 12x$$

$$e(x) = 40 + 7x = 7x + 40$$

c) Piirretään funktioiden $a(x) = 12x$ ja $e(x) = 7x + 40$ kuvaajat.



Eino ja Aino's kustannukset ovat yhtä suuret, kun $x = 8$.

Eino's kustannukset ovat pienemmät, kun elokuvia on ainakin 9.

Vastaus

a) Aino: 72 €, Eino: 82 €

b) $a(x) = 12x$, $e(x) = 7x + 40$

c) 9 elokuvan jälkeen

4.17

$$f(x) = 6x - 1$$

$$g(x) = 2x - 17$$

a) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$f(x) = g(x)$$

$$6x - 1 = 2x - 17 \quad | -2x + 1$$

$$6x - 2x = -17 + 1$$

$$4x = -16 \quad | :4$$

$$x = -4$$

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$f(x) = g(4)$$

$$6x - 1 = 2 \cdot 4 - 17$$

$$6x - 1 = -9 \quad | +1$$

$$6x = -8 \quad | :6$$

$$x = -\frac{8}{6}^{(2)}$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Vastaus

a) $x = -4$

b) $x = -\frac{4}{3}$

4.18

$$f(x) = ax + b$$

$$f(1) = 4$$

$$a \cdot 1 + b = 4$$

$$a + b = 4$$

$$f(6) = -6$$

$$a \cdot 6 + b = -6$$

$$6a + b = -6$$

Tehtävänä on ratkaista yhtälöpari

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 6a + b = -6. \end{cases}$$

Tapa 1. Ratkaistaan CAS-laskimella.

Saadaan $a = -2$ ja $b = 6$.

Tapa 2. Ratkaistaan ilman laskinta.

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 6a + b = -6 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} a + b = 4 \\ -6a - b = 6 \end{array} \right. \\ + \\ \hline -5a \quad \quad = 10 \end{array} \quad | : (-5)$$
$$a = -2$$

Sijoitetaan $a = -2$ ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan b .

$$a + b = 4$$

$$-2 + b = 4 \quad | + 2$$

$$b = 4 + 2$$

$$b = 6$$

Vastaus

$$a = -2 \text{ ja } b = 6$$

4.19

Tapa 1. Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$f(x) = ax - 14$$

Funktion arvo kohdassa 3 on 4. Ratkaistaan a .

$$f(3) = 4$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a \cdot 3 - 14 = 4$$

$$a = 6$$

Lasketaan funktion arvo kohdassa -2 .

$$f(x) = 6x - 14$$

$$f(-2) = 6 \cdot (-2) - 14 = -26$$

Tapa 2. Ratkaistaan ilman laskinta.

$$f(x) = ax - 14$$

Funktion arvo kohdassa 3 on 4. Ratkaistaan a .

$$f(3) = 4$$

$$a \cdot 3 - 14 = 4$$

$$3a - 14 = 4 \quad | +14$$

$$3a = 18 \quad | :3$$

$$a = 6$$

Lasketaan funktion arvo kohdassa -2 .

$$f(x) = 6x - 14$$

$$f(-2) = 6 \cdot (-2) - 14 = -26$$

Vastaus

$$f(-2) = -26$$

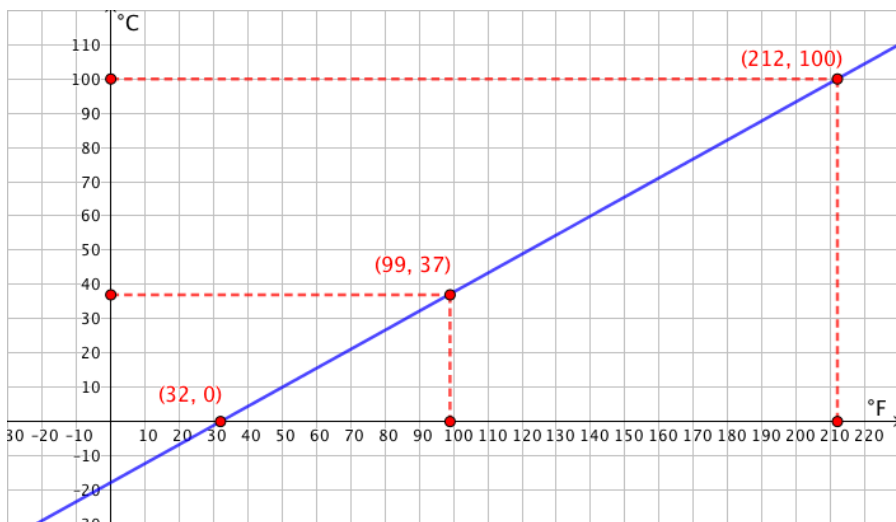
4.20

a) Lasketaan muuttujan C arvo, kun $F = 451$.

$$\begin{aligned} C &= \frac{5}{9}F - \frac{160}{9} \\ &= \frac{5}{9} \cdot 451 - \frac{160}{9} \\ &\approx 233 \end{aligned}$$

Lämpötila on $233\text{ }^{\circ}\text{C}$. Teoksen nimi on Celsius 233.

b) Piirretään kuvaaja geometriaohjelmalla.



Lämpötilat $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ ja $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ luetaan pystyakselilta ja niitä vastaavat fahrenheitasteet vaaka-akselilta.

$$0\text{ }^{\circ}\text{C} = 32\text{ }^{\circ}\text{F}$$

$$37\text{ }^{\circ}\text{C} = 99\text{ }^{\circ}\text{F}$$

$$100\text{ }^{\circ}\text{C} = 212\text{ }^{\circ}\text{F}$$

Vastaus

a) Celsius 233

b) $0\text{ }^{\circ}\text{C} = 32\text{ }^{\circ}\text{F}$

$37\text{ }^{\circ}\text{C} = 99\text{ }^{\circ}\text{F}$

$100\text{ }^{\circ}\text{C} = 212\text{ }^{\circ}\text{F}$